Leçon 228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

1. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. —

Toutes les fonctions considrées sont définies sur une sous-partie U de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Continuité : définitions, premières propriétés. —

- Def continuité en un point, sur un intervalle. Ex : x, sin(x), a.
- Une fonction continue en un point est localement bornée sur un voisinage de ce point.
- Caractérisation séquentielle de la continuité. Ex : cos(1/x), $\chi_{\mathbb{Q}}$.
- La continuité est stable par somme, produit, composition (si les domaines sont bons), inverse (si le dénominateur ne s'annule pas). Ex : les polynômes sont continus, les fractions rationnelles aussi hors de leurs pôles.
- Prolongement par continuité en un point. Ex : sin(x)/x se prolonge par 1 en 0.
- Si f est continue sur un intervalle et injective, alors son inverse est continu. Contre-ex : f(x) = 2x sur [0,1[et x sur [2,3].

2. Continuité sur un compact. —

- Sur $\mathbb{R}$ les compacts sont les fermés bornés. Continu sur un compact implique borné et atteint ses bornes.
- Def de l'uniforme continuité sur un ensemble. Ex : x^2, $\sin(x^2)$ sont UC sur des bornés mais pas sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{x}$ est UC sur $[0,\infty[$.
- Théorème de Heine. Appli : Toute fonction périodique est UC. Toute fonction continue est limite uniforme de fonct continues affines par morceaux.

3. Dérivabilité : généralités et liens avec la continuité. —

- Def de la dérivabilité en un point, sur un ensemble. Cela implique la continuité. Contre-ex : $|x|$.
- Def de classe C^1, C^n, C^∞. Ex : x^n, exp. Contre-ex : $|x|^3$ de classe C^2 mais pas C^3 en 0.
- Stabilité de la dérivabilité/C^n/C^∞ par somme, produit, composée, division. (formule de la dérivée de uv, $u \circ v$, u/v)
- Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \dots$
- Si u dérivable, expression de la dérivée de la bijection réciproque. Ex : arccos, arcsin, arctan, argch, argsh, argth.
- Lorsque f dérivable atteint un extrema, sa dérivée s'annule.
- Si f' est de signe constant sur un invervalle, alors f est monotone sur cet intervalle.

2. Théorèmes remarquables. —

1. Théorème des valeurs intermédiaires. —

- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Cor : Pour f continue sur un intervalle, Im(f) est un intervalle.
- Contre-ex : $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}$ vérifie les valeurs intermédiaires mais n'est cont qu'en 0.
- Ex : $f : [0,1] \to [0,1]$ continue admet un point fixe.
- Application : Formule de la moyenne
- Appli : Théorème de Darboux : Si f est dérivable sur un intervalle, alors Im(f') est un intervalle.
- Si f vérifie la prop des valeurs intermédiaires, alors f est continue ssi $f^{-1}(\{y\})$ est toujours un fermé. Dans le contre-ex d'avant, $f^{-1}(\{0\})$ n'était pas un fermé.

2. Théorème de Rolle. —

- Théorème de Rolle.
- Appli : Pour f dérivable, on cherche les extrema de f en étudiant les valeurs d'annulation de f'. Ex : $xln(x)$, $(2x-1)/(3x+2)$
- Appli : Pour P poly à racines réelles, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
- Racines des polynômes de Legendre, Laguerre, et Hermite.
- Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.

3. Théorème des accroissements finis. —

- Théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis.
- Applis : Théorème de l'hôpital. (contre-ex : $x^2 sin(1/x)$)

4. Développement de Taylor. —

- Inégalité de Taylor-Lagrange par les accroissements finis.
- Taylor-intégral par IPP, puis Taylor-Young.
- Application aux développements limités.
- Contre-ex : $x^3 sin(1/x)$ a un DL2 en 0 mais n'est pas C^2 en 0.

3. Suites de fonctions. —

- Une limite uniforme de fonctions cont est cont. Si la suite des dérivées CV unif elle aussi alors la limite est C^1. Ex exp(x)
- App : $(C^0([0,1], \|.\|_\infty)$ est complet.
- Contre-ex : La limite simple ne suffit pas.
- Ex de fonct continue partout dérivable nulle part.(f 1-périodique donnée par $|x|$ sur $[-1/2, 1/2]$, et on regarde $g = \sum_n \frac{f(2^n x)}{2^n}$)
- **Dev** : Densité des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables nulle part.
- App : Pour $f(x) = x^2 sin(1/x)$, f est cont sur $[-1,1]$ et dérivable sauf en 0. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]-1,1[$ bijection. Alors $g(x) = \sum_n \frac{f(x-\varphi(n))}{2^n}$ est continue sur $[-1,1]$ mais uniquement dérivable en les points irrationnels de $]-1,1[$.
- Théorèmes de Dini : Une suite de fonctions croissantes continues ayant une limite simple continue converge uniformément. Une suite croissante de fonctions continues ayant une limite simple continue converge uniformément.
- Contre-ex : $f_n(x) = 1 - x^n$ est une suite croissante de fonctions croissantes continues mais cv vers une fonction pas continue sur $[0,1]$.

- **Dev** : Théorème de Weierstrass : Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue on définit $B_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ le n-ième polynôme de Bernstein.
  Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$, et in existe $C > 0$ telle que $\|f - B_n\|_\infty \leq C.w(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où $w(h) = sup\{|f(x) - f(y)|, |x-y| \leq h\}$ est le module d'uniforme continuité de f.

4. Exemples remarquables. —

1. Fonctions lipschitziennes. —

- Une fonction Lipschitzienne est continue et UC.
- Contre-ex : $\sqrt{x}$ est UC mais pas Lipschitz sur $[0, \infty[$
- Théorème du point fixe de Picard.

2. Fonctions monotones. —

- Définition d'une fonction monotone $f : I \to \mathbb{R}$, strictement monotone.
- Ex : $f(x) = ax + b$, $f(x) = 2^x$ sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- La combi lin à coeffs positifs de fonctions croiss est croiss. Si f croiss, -f décroiss. Si f croiss positive, 1/f décroiss. Si f,g croiss, $f \circ g$ aussi. Si f,g décroiss, $f \circ g$ croiss.
- Le produit de fonctions monotones n'est pas forcément monotone (ex : $f(x) = x * x$). Pareil pour l'inverse si f non-nulle. Croiss + décroiss = n'importe quoi.
- L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.
- ex : Pour $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0,1[$ bijective, $u_n(x) := \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2^n} \text{ si } \varphi(n) < x \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$, et $f = \sum_{n \geq 0} u_n$, f est strict croiss sur $]0,1[$ et discontinue en tout point rationnel.
- Une fonction monotone est continue ssi son image est un intervalle.
- Une fonction continue est strictement monotone sur un intervalle ssi elle c'est un homéomorphisme sur son image.

3. Fonctions convexes. —

- Def de convexité, concavité.
- Ex : exp sur $\mathbb{R}$.
- La somme de fonct convexes est convexe, la limite simple aussi. Si f est convexe, -f est concave.
- Contre-ex : Le produit de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = x^2.x$ non-convexe).
- Si f continue, bijective sur son image, et convexe, alors f^{-1} est concave. Ex : exp et log.
- Une fonct cont est convexe ssi $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Contre-ex : Indicatrice de $\mathbb{Q}$.
- Propriété des 3 cordes. $x \in I - \{x_0\} \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante.
- f différentiable sur I intervalle est convexe ssi f' est croissante sur I.
- f D^2 sur I intervalle est convexe ssi f" ≥ 0 sur I, et est strictement convexe ssi les zéros de f" sont isolés.
- Contre-ex : La composée de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = (e^x)^2 - 1000e^x$ non-convexe)(sa dérivée seconde en 0 est strict négative)
- Les fonct convexes sont différentiables sauf en un nombre dénombrable de points. Ex: $|x|$.

Références

Rombaldi : I et II, Fonctions convexes, régularité.
Gourdon : Théorèmes continuité,dérivabilité de la limite, Th de Dini
Hauchecorne : Contre-Exemples
Demailly : Méthode de la sécante
Zuily, Queffélec : Densité des cont partout dérivables nulle part (Dev). Théorème de Weierstrass. (Dev)

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes